

© International Baccalaureate Organization 2022

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2022

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2022

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Matemáticas: Análisis y Enfoques

## Nivel Superior

### Prueba 1

Viernes 6 de mayo de 2022 (tarde)

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

#### Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

### Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

El  $n$ -ésimo término de una progresión aritmética viene dado por  $u_n = 15 - 3n$ .

- (a) Indique el valor del primer término ( $u_1$ ). [1]
- (b) Sabiendo que el  $n$ -ésimo término de esta progresión es  $-33$ , halle el valor de  $n$ . [2]
- (c) Halle la diferencia común ( $d$ ). [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





3. [Puntuación máxima: 8]

La función  $f$  se define así:  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ , donde  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq -1$ .

(a) El gráfico de  $y = f(x)$  tiene una asíntota vertical y una asíntota horizontal.

Escriba la ecuación de:

(i) La asíntota vertical

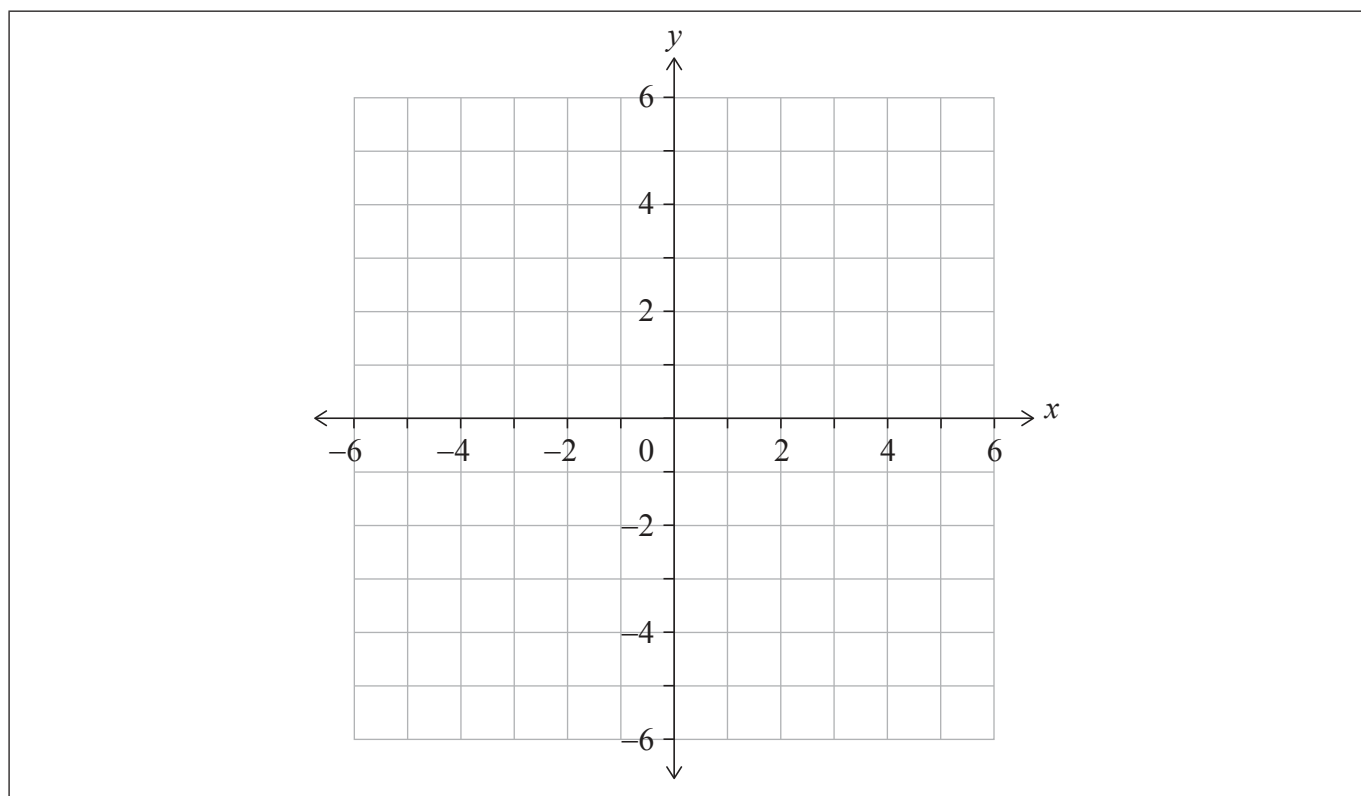
(ii) La asíntota horizontal

[2]

(b) En los siguientes ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente el gráfico de  $y = f(x)$ .

En ese mismo dibujo aproximado, indique claramente las asíntotas y la posición de todos los puntos de intersección con los ejes que haya.

[3]



(c) A partir de lo anterior, resuelva la inecuación  $0 < \frac{2x-1}{x+1} < 2$ .

[1]

(d) Resuelva la inecuación  $0 < \frac{2|x|-1}{|x|+1} < 2$ .

[2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**



16EP04



4. [Puntuación máxima: 5]

Halle el menor valor positivo de  $x$  para el cual se cumple que  $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP06

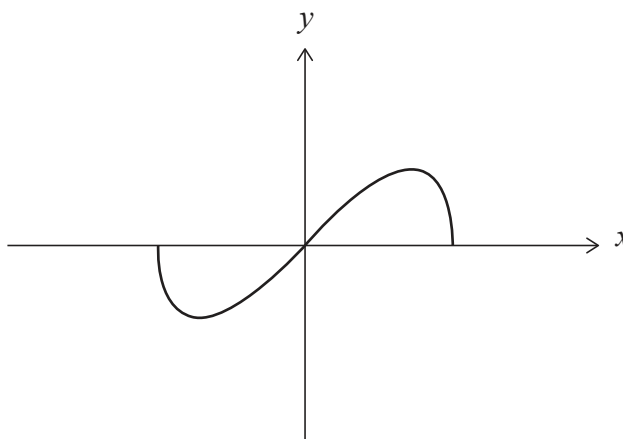




6. [Puntuación máxima: 8]

La función  $f$  se define así:  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ , donde  $-1 \leq x \leq 1$ .

A continuación se muestra el gráfico de  $y = f(x)$ .



(a) Muestre que  $f$  es una función impar.

[2]

El recorrido de  $f$  es  $a \leq y \leq b$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(b) Halle el valor de  $a$  y el valor de  $b$ .

[6]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP08

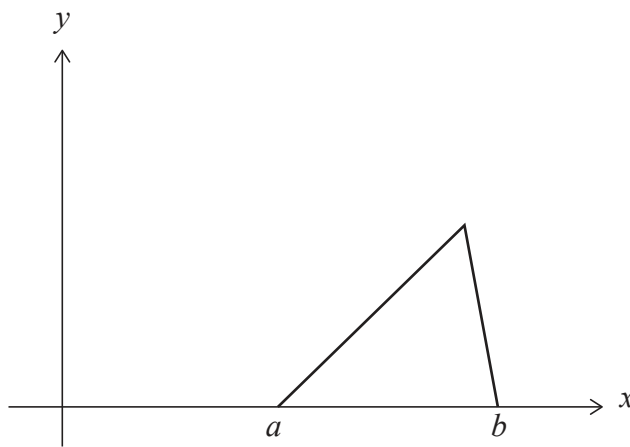


8. [Puntuación máxima: 6]

Una variable aleatoria continua  $X$  tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(b-a)(c-a)}(x-a), & a \leq x \leq c \\ \frac{2}{(b-a)(b-c)}(b-x), & c < x \leq b \\ 0, & \text{resto de valores} \end{cases}$$

La siguiente figura muestra el gráfico de  $y = f(x)$  para  $a \leq x \leq b$ .



Sabiendo que  $c \geq \frac{a+b}{2}$ , halle una expresión para la mediana de  $X$  en función de  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



9. [Puntuación máxima: 5]

Pruebe por contradicción que la ecuación  $2x^3 + 6x + 1 = 0$  no tiene ninguna raíz entera.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP11

Véase al dorso

No escriba soluciones en esta página.

### Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 16]

Se tira un dado no equilibrado de cuatro caras, rotuladas 1, 2, 3 y 4, y se va anotando el resultado. Sea  $X$  el resultado que se obtiene al tirar el dado. En la siguiente tabla se muestra la distribución de probabilidad de  $X$ , donde  $p$  y  $q$  son constantes.

$x$	1	2	3	4
$P(X=x)$	$p$	0,3	$q$	0,1

Para esta distribución de probabilidad, se sabe que  $E(X) = 2$ .

(a) Muestre que  $p = 0,4$  y  $q = 0,2$ . [5]

(b) Halle  $P(X > 2)$ . [2]

Nicky decide jugar a un juego con este dado de cuatro caras. En este juego está permitido tirar el dado cinco veces como máximo. La puntuación se calcula sumando los resultados de todas las tiradas. Nicky gana el juego si obtiene una puntuación de al menos diez.

Después de tirar el dado tres veces, la puntuación de Nicky es igual a cuatro.

(c) Suponiendo que las tiradas del dado son independientes unas de otras, halle la probabilidad de que Nicky gane el juego. [5]

David tiene dos pares de dados equilibrados de cuatro caras: un par amarillo y un par rojo.

Los dos dados amarillos tienen las caras rotuladas así: 1, 2, 3 y 4. Sea  $S$  la suma que se obtiene al tirar los dos dados amarillos. A continuación se muestra la distribución de probabilidad de  $S$ .

$s$	2	3	4	5	6	7	8
$P(S=s)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

El primer dado rojo tiene las caras rotuladas así: 1, 2, 2 y 3. El segundo dado rojo tiene las caras rotuladas así: 1,  $a$ ,  $a$  y  $b$ , donde  $a < b$  y  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ . La distribución de probabilidad de la suma que se obtiene al tirar el par rojo es igual a la distribución de la suma que se obtiene al tirar el par amarillo.

(d) Determine el valor de  $b$ . [2]

(e) Halle el valor de  $a$ , aportando pruebas que respalden su respuesta. [2]



No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 20]

La función  $f$  se define así:  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$ , donde  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq -1$ ,  $x \neq 3$ .

- (a) Dibuje aproximadamente la curva  $y = f(x)$ , indicando claramente todas las asíntotas que haya con sus correspondientes ecuaciones. Indique también las coordenadas de todos los máximos y mínimos locales y de todos los puntos de intersección con los ejes de coordenadas que haya. [6]

La función  $g$  se define así:  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$ , donde  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 3$ .

- (b) La inversa de  $g$  es  $g^{-1}$ .

(i) Muestre que  $g^{-1}(x) = 1 + \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{x}$ .

- (ii) Indique el dominio de  $g^{-1}$ . [7]

La función  $h$  se define así:  $h(x) = \arctan \frac{x}{2}$ , donde  $x \in \mathbb{R}$ .

- (c) Sabiendo que  $(h \circ g)(a) = \frac{\pi}{4}$ , halle el valor de  $a$ .

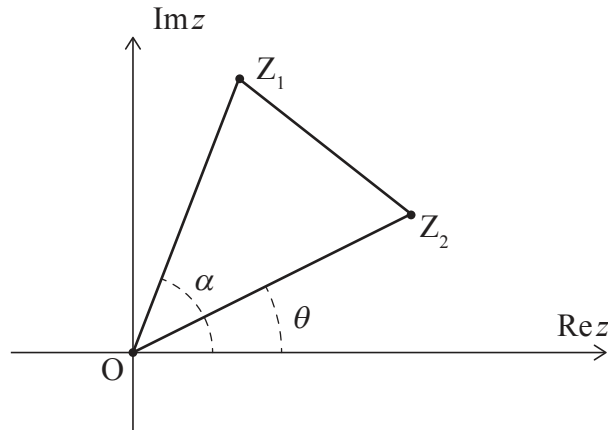
Dé la respuesta en la forma  $p + \frac{q}{2}\sqrt{r}$ , donde  $p, q, r \in \mathbb{Z}^+$ . [7]



No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 18]

En el siguiente diagrama de Argand, los puntos  $Z_1$ ,  $O$  y  $Z_2$  son los vértices del triángulo  $Z_1OZ_2$ , descrito en sentido contrario a las agujas del reloj.



El punto  $Z_1$  representa el número complejo  $z_1 = r_1 e^{i\alpha}$ , donde  $r_1 > 0$ . El punto  $Z_2$  representa el número complejo  $z_2 = r_2 e^{i\theta}$ , donde  $r_2 > 0$ .

Los ángulos  $\alpha$ ,  $\theta$  se miden en sentido contrario a las agujas del reloj desde la parte positiva del eje real, de modo tal que  $0 \leq \alpha$ ,  $\theta < 2\pi$  y  $0 < \alpha - \theta < \pi$ .

(a) Muestre que  $z_1 z_2^* = r_1 r_2 e^{i(\alpha - \theta)}$ , donde  $z_2^*$  es el número complejo conjugado de  $z_2$ . [2]

(b) Sabiendo que  $\text{Re}(z_1 z_2^*) = 0$ , muestre que  $Z_1OZ_2$  es un triángulo rectángulo. [2]

En los apartados (c), (d) y (e), considere el caso particular en el que  $Z_1OZ_2$  es un triángulo equilátero.

(c) (i) Exprese  $z_1$  en función de  $z_2$ .

(ii) A partir de lo anterior, muestre que  $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$ . [6]

Sean  $z_1$  y  $z_2$  las raíces distintas de la ecuación  $z^2 + az + b = 0$ , donde  $z \in \mathbb{C}$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(d) Utilice el resultado del subapartado (c)(ii) para mostrar que  $a^2 - 3b = 0$ . [5]

Considere la ecuación  $z^2 + az + 12 = 0$ , donde  $z \in \mathbb{C}$  y  $a \in \mathbb{R}$ .

(e) Sabiendo que  $0 < \alpha - \theta < \pi$ , deduzca que con el punto  $O$  y las raíces de esta ecuación se puede formar un solo triángulo equilátero  $Z_1OZ_2$ . [3]

Referencias:

© Organización del Bachillerato Internacional, 2022



16EP14

**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP15



**No** escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP16